Méthode de Newton-Raphson

Théorème : Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle qu'il existe $a \in \Omega$ vérifiant $f(a) = 0$. On suppose df_a inversible. Il existe un voisinage U de a dans Ω tel que l'application $\varphi : \begin{array}{l} U \to \mathbb{R}^m \\ x \mapsto x - df_x^{-1}(f(x)) \end{array}$ soit bien définie et possède a comme point fixe superattractif.

Démonstration : Par inversion locale, on fixe un voisinage U, que l'on peut supposer de la forme $B(a,\eta)$, tel que f induise un $\mathcal{C}^2$ difféomorphisme de U sur $f(U)$.

L'application φ est alors bien définie et $\mathcal{C}^1$ sur U.

Par Taylor-Young, on a
$$f(a+h) = \underbrace{f(a)}_{=0} + df_a(h) + \frac{1}{2} d^2f_a(h,h) + o(\|h\|^2),$$
$$= df_a\left(h + \frac{1}{2} df_a^{-1} \circ d^2f_a(h,h) + o(\|h\|^2)\right)$$

et
$$df_{a+h} = df_a + d^2f_a(h) + o(\|h\|),$$
$$= df_a \circ \left[id + df_a^{-1} \circ \left(d^2f_a(h)\right) + o(\|h\|)\right]$$

donc
$$df_{a+h}^{-1} = \left[id + df_a^{-1} \circ \left(d^2f_a(h)\right) + o(\|h\|)\right]^{-1} \circ df_a^{-1}.$$
$$= \left[id - df_a^{-1} \circ \left(d^2f_a(h)\right) + o(\|h\|)\right] \circ df_a^{-1}$$

On a alors
$$df_{a+h}^{-1}(f(a+h)) = \left[id - df_a^{-1} \circ (d^2f_a(h)) + o(\|h\|)\right] \circ df_a^{-1} \circ df_a \left(h + \frac{1}{2} df_a^{-1} \circ d^2f_a(h,h) + o(\|h\|^2)\right)$$
$$= \left(id - df_a^{-1} \circ (d^2f_a(h)) + o(\|h\|)\right)\left(h + \frac{1}{2} df_a^{-1} \circ d^2f_a(h,h) + o(\|h\|^2)\right)$$
$$= h + \frac{1}{2} df_a^{-1} \circ d^2f_a(h,h) - df_a^{-1} \circ d^2f_a(h,h) + o(\|h\|^2)$$
$$= h - \frac{1}{2} df_a^{-1} \circ d^2f_a(h,h) + o(\|h\|^2)$$

donc
$$\varphi(a+h) = a + h - df_{a+h}^{-1}(f(a+h)) = a + \frac{1}{2} df_a^{-1} \circ d^2f_a(h,h) + o(\|h\|^2).$$

On fixe alors une fonction continue $\varepsilon : \begin{array}{ccc} B(0,\eta) & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ h & \longmapsto & \varepsilon(h) \end{array}$ telle que $\varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

et, pour tout $h \in B(0,\eta)$, on ait $\varphi(a+h) = a + \frac{1}{2} df_a^{-1} \circ d^2f_a(h,h) + \varepsilon(h) \|h\|^2$.

Par Taylor-Young, on a alors $d\varphi_a = 0$ et $d^2\varphi_a = \frac{1}{2} df_a^{-1} \circ d^2 f_a$.

De plus, pour tout $h \in B(0,\eta)$, on a $\|\varphi(a+h) - a\| = \left\| \frac{1}{2} df_a^{-1} \circ d^2f_a(h,h) + \varepsilon(h)\|h\|^2 \right\|$,

$$\leqslant \underbrace{\left(\frac{1}{2} |||df_a^{-1}||| \cdot |||d^2f_a||| + \|\varepsilon(h)\|\right)}_{=:M} \|h\|^2$$

ce qui achève la preuve.

On remarque à présent que, quitte à réduire η, on peut supposer que $\|\varepsilon(h)\| < 1$ sur $B(0,\eta)$.

Pour tout $h \in B(0,\eta)$, on a alors $\|\varphi(a+h) - a\| \leqslant (M+1)\|h\|^2$, donc,

$$\leqslant (M+1)\eta^2$$

en prenant $\eta < \frac{1}{M+1}$, on a $\|\varphi(a+h) - a\| < \eta$, donc φ stabilise $B(a,\eta)$.

Ceci permet de définir une suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\begin{cases} x_0 \in B(a,\eta) \\ x_{n+1} = \varphi(x_n) \text{ pour } n \geqslant 0 \end{cases}$.

On a alors, pour tout $n \geqslant 0$, $\|x_{n+1} - a\| = \|\varphi(x_n) - a\|$

$$\leqslant (M+1)\|x_n - a\|^2$$

$$\leqslant (M+1)^{2^n-1} \|x_0 - a\|^{2^n} \quad \text{par récurrence}$$

$$\leqslant \frac{1}{M+1} \|(M+1)(x_0 - a)\|^{2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

car $x_0 \in B(a,\eta)$ et $\eta < \frac{1}{M+1}$.